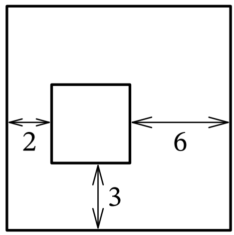
7 класс

Задача 7.1. Внутри большого квадрата находится маленький квадрат, соответственные стороны этих квадратов параллельны. Расстояния между некоторыми сторонами квадратов отмечены на рисунке. На сколько периметр большого квадрата больше, чем периметр маленького?



Ответ: 32.

Решение. Пусть сторона маленького квадрата равна x, тогда сторона большого квадрата, если считать по горизонтали, равна $2 + x + 6 = x + 8$. Периметр квадрата в четыре раза больше его стороны, так что отсюда нетрудно вычислить разность периметров:

$$4(x + 8) - 4x = 32. \qquad \square$$

Задача 7.2. Каждое из натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 377$ покрашено либо в красный, либо в синий цвет (оба цвета присутствуют). Известно, что количество красных чисел равно наименьшему красному числу, а количество синих чисел равно наибольшему синему числу. Чему равно наименьшее красное число?

Ответ: 189.

Решение. Пусть N — наибольшее синее число. Тогда в синий цвет могут быть покрашены только числа от 1 до N. Поскольку синих чисел всего N, получаем, что все числа от 1 до N — синие. Соответственно, все числа от $N+1$ до 377 — красные. Поскольку количество красных чисел равно наименьшему красному числу, получаем уравнение $N+1 = 377-N$, из которого находим $N = 188$. Значит, наименьшее красное число — это 189. $\square$

Задача 7.3. Крош и Ёжик решили проверить, кто из них быстрее добежит по прямой дороге от домика Копатыча до домика Лосяша. Когда Крош пробежал 20 метров, Ёжик пробежал всего 16 метров. А когда Крошу оставалось 30 метров, Ёжику оставалось 60 метров. Сколько метров составляет длина дороги от домика Копатыча до домика Лосяша? (Крош и Ёжик выбежали одновременно, каждый из них бежал со своей постоянной скоростью.)

Ответ: 180.

Решение. Когда Крош пробежал 20 метров, Ёжик пробежал всего 16 метров, поэтому их скорости относятся как $5 : 4$.

Когда Крошу оставалось пробежать 30 метров, пусть он уже пробежал $5x$ метров (x — не обязательно целое число). Тогда к этому моменту Ёжик пробежал $4x$ метров. Значит, общая длина всей дороги в метрах с одной стороны равна $5x + 30$, а с другой стороны — $4x + 60$. Получаем уравнение $5x + 30 = 4x + 60$, из которого находим $x = 30$.

Следовательно, искомая длина составляет $5 \cdot 30 + 30 = 180$ метров. □

Задача 7.4. Рассмотрим семизначные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 встречается ровно один раз.
(а) *(1 балл)* У скольких из них цифры с первой по шестую расположены в порядке возрастания, а с шестой по седьмую — в порядке убывания?
(б) *(3 балла)* У скольких из них цифры с первой по пятую расположены в порядке возрастания, а с пятой по седьмую — в порядке убывания?

Ответ: **(а)** 6. **(б)** 15.

Решение. **(а)** Из условия следует, что шестая цифра — самая большая, поэтому она равна 7. В качестве последней цифры можно выбрать любую цифру от 1 до 6, и это однозначно определит всё число (ведь первые пять цифр должны быть упорядочены по возрастанию). Значит, таких семизначных чисел ровно 6.

(б) Из условия следует, что пятая цифра — самая большая, поэтому она равна 7. В качестве двух последних цифр можно выбрать две различные цифры от 1 до 6, и это однозначно определит всё число (ведь первые четыре цифры должны быть упорядочены по возрастанию). Также шестая цифра должна быть больше седьмой, поэтому возможных пар последних цифр ровно 15:

$$65, 64, 63, 62, 61, 54, 53, 52, 51, 43, 42, 41, 32, 31, 21.$$

Соответственно, искомых семизначных чисел тоже 15. □

Замечание. Количество пар в пункте (б) равно количеству способов выбрать две цифры из множества из 6 цифр, то есть $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Задача 7.5. В лесу живут эльфы и гномы. Однажды 60 жителей этого леса встали в ряд лицом в одну сторону, в этот момент некоторые из них могли быть в колпаках. (Эльфов могло быть от 0 до 60 включительно, жителей в колпаках тоже могло быть от 0 до 60 включительно.)

Каждый из 60 жителей сказал одну из следующих фраз:

- «Мой сосед справа — эльф».
- «Мой сосед справа — в колпаке».

Известно, что эльфы без колпаков всегда говорят правду, а эльфы в колпаках всегда лгут. У гномов всё наоборот: гномы без колпаков всегда лгут, а гномы в колпаках всегда говорят правду.
(а) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов без колпаков могло быть в ряду?
(б) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов в колпаках могло быть в ряду?

Ответ: **(а)** 59. **(б)** 30.

Решение. **(а)** Заметим, что самый правый житель не может говорить правду, ведь правее него никого нет. Это значит, что он не может быть эльфом без колпака, поэтому всего эльфов без колпаков не более 59.

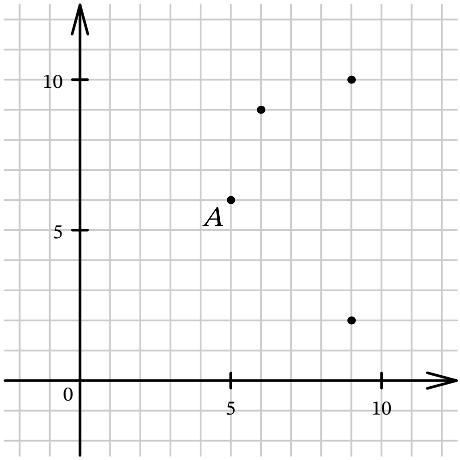
Теперь приведём пример ситуации, когда эльфов без колпаков ровно 59. Пусть самый правый житель — это эльф в колпаке, а остальные 59 — это эльфы без колпака. Пусть все говорят фразу «Мой сосед справа — эльф». Тогда эльфы без колпаков говорят правду, а эльф в колпаке лжёт.

(б) Заметим, что среди любых двух соседей не может быть двух эльфов в колпаках. Действительно, если это так, то левый из них точно сказал бы правду. Но такого не может быть, ведь эльфы в колпаках всегда лгут.

Разобьём всех жителей на 30 пар соседей. В каждой из этих пар не больше одного эльфа в колпаке, поэтому всего эльфов в колпаках не больше 30.

Теперь приведём пример ситуации, когда эльфов в колпаках ровно 30. Пусть чередуются гномы в колпаках и эльфы в колпаках, причём самый левый житель — гном. Пусть все говорят фразу «Мой сосед справа — эльф». Тогда гномы в колпаках говорят правду, а эльфы в колпаках лгут. □

Задача 7.6. На плоскости отметили точки A, B, C, D, E так, что треугольники ABC и ADE равны: $AB = AD, AC = AE, BC = DE$. Затем с чертежа стёрли точку E и подписи точек B, C и D.



Пусть точка E имела координаты $(x; y)$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение величины xy.
(б) *(3 балла)* Укажите все возможные значения величины xy.

Ответ: **(а)** любое из чисел 14, 18, 40. **(б)** 14, 18, 40.

Решение. Из условия $AB = AD$ следует, что B и D — это две самые правые отмеченные точки (в неизвестном порядке). Оставшаяся неподписанная точка — это C.

Случай 1. Пусть точка B находится сверху, а точка D — снизу (рис. 1a). Ясно, что для точки E есть два варианта:

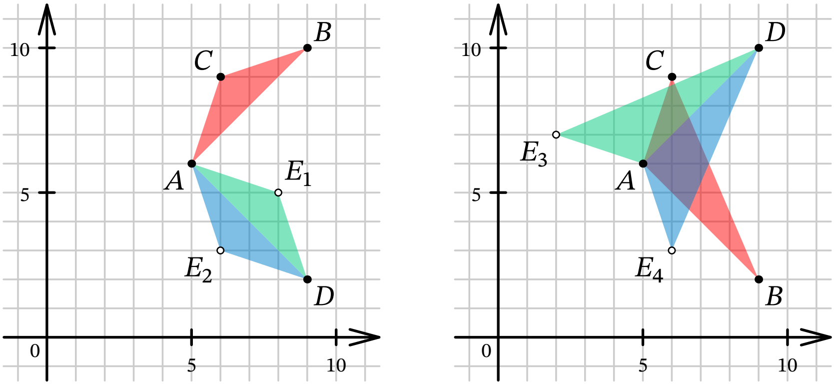
- точка E_1 с координатами $(8; 5)$;
- точка E_2 с координатами $(6; 3)$.

Случай 2. Пусть точка B находится внизу, а точка D — сверху. Ясно, что для точки E есть два варианта:

- точка E_3 с координатами $(2; 7)$;
- точка E_4 с координатами $(6; 3)$.

Осталось лишь заметить, что точки E_1 и E_4 совпадают, поэтому есть ровно три возможных расположения точки E, а именно $(2; 7)$, $(6; 3)$ и $(8; 5)$. Соответственно, произведение координат точки E может принимать ровно три значения: 14, 18 и 40. □

Задача 7.7. На какое наибольшее количество групп можно разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ так, чтобы сумма чисел в каждой группе была простым числом? (Каждое число должно войти ровно в одну группу. Каждая группа должна состоять из одного или нескольких чисел.)



(а) (б)

Рис. 1: к решению задачи 7.6

Ответ: 51.

Решение. Заметим, что если в какой-то группе все числа чётные, то и сумма чисел в ней тоже чётная. Как известно, единственное простое чётное число — это 2. Значит, получить группу, состоящую только из чётных чисел, сумма которых является простым числом, можно единственным способом: взять в неё только число 2. В каждую из остальных групп придётся брать хотя бы одно нечётное число, поэтому таких групп не более 50. Итого получаем, что групп не более 51.

Теперь приведём пример разбиения на 51 группу. Для всех k от 1 до 50, кроме $k = 2$ и $k = 4$, возьмём в группу с номером k два числа k и $101 - k$, которые в сумме дают простое число 101.

В группу № 2 возьмём только число 2.

В группу № 4 возьмём числа 4 и 99, их сумма равна простому числу 103.

В группу № 51 возьмём только число 97, которое является простым.

Итого мы получили 51 группу, сумма чисел в каждой из которых — простое число. □

Задача 7.8. Клетки таблицы 50×50 раскрашены в n цветов так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех n цветов. Найдите наибольшее возможное количество клеток синего цвета, если

(а) *(1 балл)* $n = 2$;
(б) *(3 балла)* $n = 25$.

Ответ: **(а)** 2450. **(б)** 1300.

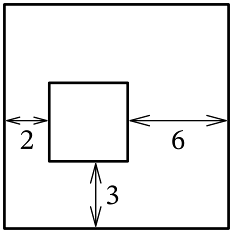
Решение. Докажем, что клеток любого цвета A, встречающегося в раскраске, не меньше 50. Предположим, это не так, и клеток цвета A не больше 49. Тогда найдётся строка без клеток цвета A, а также найдётся столбец без клеток цвета A. Но тогда для клетки в пересечении этих строки и столбца условие не выполняется, противоречие. Следовательно, клеток любого цвета A не меньше 50.

(а) Поскольку клеток не синего цвета не меньше 50, то клеток синего цвета не больше $50 \cdot 50 - 50 = 2450$. Ровно 2450 клеток синего цвета может быть, например, если в нижней строке все клетки — красные, а все остальные клетки таблицы — синие.

(б) Поскольку клеток любого не синего цвета не меньше 50, то клеток синего цвета не больше $50 \cdot 50 - 24 \cdot 50 = 1300$. Ровно 1300 клеток синего цвета может быть, например, если в первых 26 строках таблицы все клетки — синие, а каждая из остальных 24 строк состоит из клеток какого-то одного цвета, причём цвета этих 24 строк различны. □

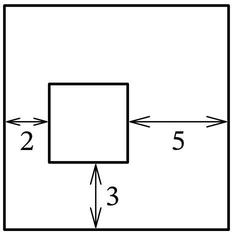
7 класс

Вариант 7.1.1. Внутри большого квадрата находится маленький квадрат, соответственные стороны этих квадратов параллельны. Расстояния между некоторыми сторонами квадратов отмечены на рисунке. На сколько периметр большого квадрата больше, чем периметр маленького?



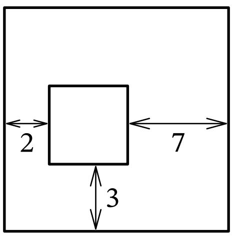
Ответ: 32.

Вариант 7.1.2. Внутри большого квадрата находится маленький квадрат, соответственные стороны этих квадратов параллельны. Расстояния между некоторыми сторонами квадратов отмечены на рисунке. На сколько периметр большого квадрата больше, чем периметр маленького?



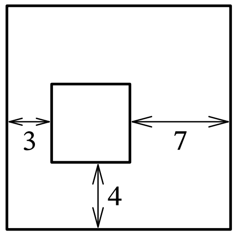
Ответ: 28.

Вариант 7.1.3. Внутри большого квадрата находится маленький квадрат, соответственные стороны этих квадратов параллельны. Расстояния между некоторыми сторонами квадратов отмечены на рисунке. На сколько периметр большого квадрата больше, чем периметр маленького?



Ответ: 36.

Вариант 7.1.4. Внутри большого квадрата находится маленький квадрат, соответственные стороны этих квадратов параллельны. Расстояния между некоторыми сторонами квадратов отмечены на рисунке. На сколько периметр большого квадрата больше, чем периметр маленького?



Ответ: 40.

Вариант 7.2.1. Каждое из натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 377$ покрашено либо в красный, либо в синий цвет (оба цвета присутствуют). Известно, что количество красных чисел равно наименьшему красному числу, а количество синих чисел равно наибольшему синему числу. Чему равно наименьшее красное число?

Ответ: 189.

Вариант 7.2.2. Каждое из натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 375$ покрашено либо в красный, либо в синий цвет (оба цвета присутствуют). Известно, что количество красных чисел равно наименьшему красному числу, а количество синих чисел равно наибольшему синему числу. Чему равно наименьшее красное число?

Ответ: 188.

Вариант 7.2.3. Каждое из натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 373$ покрашено либо в красный, либо в синий цвет (оба цвета присутствуют). Известно, что количество красных чисел равно наименьшему красному числу, а количество синих чисел равно наибольшему синему числу. Чему равно наименьшее красное число?

Ответ: 187.

Вариант 7.2.4. Каждое из натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, 371$ покрашено либо в красный, либо в синий цвет (оба цвета присутствуют). Известно, что количество красных чисел равно наименьшему красному числу, а количество синих чисел равно наибольшему синему числу. Чему равно наименьшее красное число?

Ответ: 186.

Вариант 7.3.1. Крош и Ёжик решили проверить, кто из них быстрее добежит по прямой дороге от домика Копатыча до домика Лосяша. Когда Крош пробежал 20 метров, Ёжик пробежал всего 16 метров. А когда Крошу оставалось 30 метров, Ёжику оставалось 60 метров. Сколько метров составляет длина дороги от домика Копатыча до домика Лосяша? (Крош и Ёжик выбежали одновременно, каждый из них бежал со своей постоянной скоростью.)

Ответ: 180.

Вариант 7.3.2. Крош и Ёжик решили проверить, кто из них быстрее добежит по прямой дороге от домика Копатыча до домика Лосяша. Когда Крош пробежал 20 метров, Ёжик пробежал всего 16 метров. А когда Крошу оставалось 20 метров, Ёжику оставалось 50 метров. Сколько метров составляет длина дороги от домика Копатыча до домика Лосяша? (Крош и Ёжик выбежали одновременно, каждый из них бежал со своей постоянной скоростью.)

Ответ: 170.

Вариант 7.3.3. Крош и Ёжик решили проверить, кто из них быстрее добежит по прямой дороге от домика Копатыча до домика Лосяша. Когда Крош пробежал 20 метров, Ёжик пробежал всего 16 метров. А когда Крошу оставалось 40 метров, Ёжику оставалось 70 метров. Сколько метров составляет длина дороги от домика Копатыча до домика Лосяша? (Крош и Ёжик выбежали одновременно, каждый из них бежал со своей постоянной скоростью.)

Ответ: 190.

Вариант 7.3.4. Крош и Ёжик решили проверить, кто из них быстрее добежит по прямой дороге от домика Копатыча до домика Лосяша. Когда Крош пробежал 20 метров, Ёжик пробежал всего 16 метров. А когда Крошу оставалось 10 метров, Ёжику оставалось 40 метров. Сколько метров составляет длина дороги от домика Копатыча до домика Лосяша? (Крош и Ёжик выбежали одновременно, каждый из них бежал со своей постоянной скоростью.)

Ответ: 160.

Вариант 7.4.1. Рассмотрим семизначные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ встречается ровно один раз.
(а) *(1 балл)* У скольких из них цифры с первой по шестую расположены в порядке возрастания, а с шестой по седьмую — в порядке убывания?
(б) *(3 балла)* У скольких из них цифры с первой по пятую расположены в порядке возрастания, а с пятой по седьмую — в порядке убывания?

Ответ: **(а)** 6. **(б)** 15.

Вариант 7.4.2. Рассмотрим восьмизначные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 встречается ровно один раз.
(а) *(1 балл)* У скольких из них цифры с первой по седьмую расположены в порядке возрастания, а с седьмой по восьмую — в порядке убывания?
(б) *(3 балла)* У скольких из них цифры с первой по шестую расположены в порядке возрастания, а с шестой по восьмую — в порядке убывания?

Ответ: **(а)** 7. **(б)** 21.

Вариант 7.4.3. Рассмотрим девятизначные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 встречается ровно один раз.
(а) *(1 балл)* У скольких из них цифры с первой по восьмую расположены в порядке возрастания, а с восьмой по девятую — в порядке убывания?
(б) *(3 балла)* У скольких из них цифры с первой по седьмую расположены в порядке возрастания, а с седьмой по девятую — в порядке убывания?

Ответ: **(а)** 8. **(б)** 28.

Вариант 7.5.1. В лесу живут эльфы и гномы. Однажды 60 жителей этого леса встали в ряд лицом в одну сторону, в этот момент некоторые из них могли быть в колпаках. (Эльфов могло быть от 0 до 60 включительно, жителей в колпаках тоже могло быть от 0 до 60 включительно.)

Каждый из 60 жителей сказал одну из следующих фраз:

- «Мой сосед справа — эльф».
- «Мой сосед справа — в колпаке».

Известно, что эльфы без колпаков всегда говорят правду, а эльфы в колпаках всегда лгут. У гномов всё наоборот: гномы без колпаков всегда лгут, а гномы в колпаках всегда говорят правду.
(а) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов без колпаков могло быть в ряду?
(б) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов в колпаках могло быть в ряду?

Ответ: **(а)** 59. **(б)** 30.

Вариант 7.5.2. В лесу живут эльфы и гномы. Однажды 70 жителей этого леса встали в ряд лицом в одну сторону, в этот момент некоторые из них могли быть в колпаках. (Эльфов могло быть от 0 до 70 включительно, жителей в колпаках тоже могло быть от 0 до 70 включительно.)

Каждый из 70 жителей сказал одну из следующих фраз:

- «Мой сосед справа — эльф».
- «Мой сосед справа — в колпаке».

Известно, что эльфы без колпаков всегда говорят правду, а эльфы в колпаках всегда лгут. У гномов всё наоборот: гномы без колпаков всегда лгут, а гномы в колпаках всегда говорят правду.
(а) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов без колпаков могло быть в ряду?
(б) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов в колпаках могло быть в ряду?

Ответ: **(а)** 69. **(б)** 35.

Вариант 7.5.3. В лесу живут эльфы и гномы. Однажды 80 жителей этого леса встали в ряд лицом в одну сторону, в этот момент некоторые из них могли быть в колпаках. (Эльфов могло быть от 0 до 80 включительно, жителей в колпаках тоже могло быть от 0 до 80 включительно.)

Каждый из 80 жителей сказал одну из следующих фраз:

- «Мой сосед справа — эльф».
- «Мой сосед справа — в колпаке».

Известно, что эльфы без колпаков всегда говорят правду, а эльфы в колпаках всегда лгут. У гномов всё наоборот: гномы без колпаков всегда лгут, а гномы в колпаках всегда говорят правду.
(а) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов без колпаков могло быть в ряду?
(б) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов в колпаках могло быть в ряду?

Ответ: **(а)** 79. **(б)** 40.

Вариант 7.5.4. В лесу живут эльфы и гномы. Однажды 90 жителей этого леса встали в ряд лицом в одну сторону, в этот момент некоторые из них могли быть в колпаках. (Эльфов могло быть от 0 до 90 включительно, жителей в колпаках тоже могло быть от 0 до 90 включительно.)

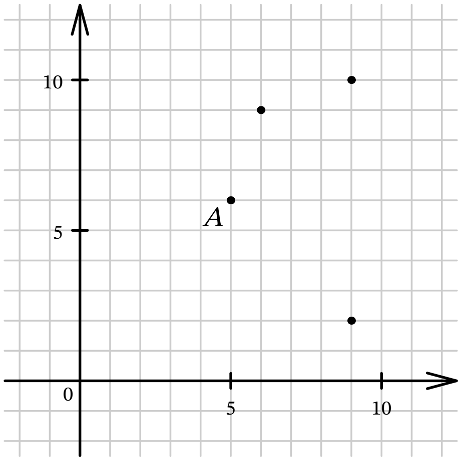
Каждый из 90 жителей сказал одну из следующих фраз:

- «Мой сосед справа — эльф».
- «Мой сосед справа — в колпаке».

Известно, что эльфы без колпаков всегда говорят правду, а эльфы в колпаках всегда лгут. У гномов всё наоборот: гномы без колпаков всегда лгут, а гномы в колпаках всегда говорят правду.
(а) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов без колпаков могло быть в ряду?
(б) *(2 балла)* Какое наибольшее количество эльфов в колпаках могло быть в ряду?

Ответ: **(а)** 89. **(б)** 45.

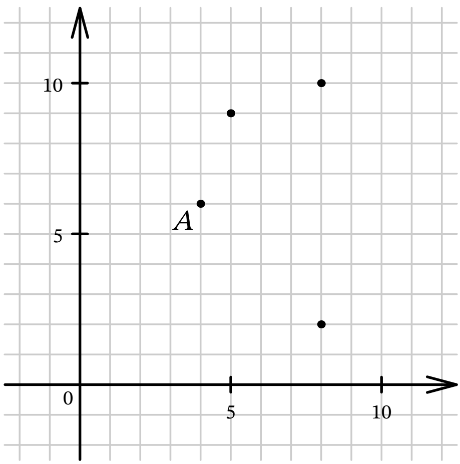
Вариант 7.6.1. На плоскости отметили точки A, B, C, D, E так, что треугольники ABC и ADE равны: $AB = AD, AC = AE, BC = DE$. Затем с чертежа стёрли точку E и подписи точек B, C и D.



Пусть точка E имела координаты $(x; y)$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение величины xy.
(б) *(3 балла)* Укажите все возможные значения величины xy.

Ответ: **(а)** любое из чисел 14, 18, 40. **(б)** 14, 18, 40.

Вариант 7.6.2. На плоскости отметили точки A, B, C, D, E так, что треугольники ABC и ADE равны: $AB = AD, AC = AE, BC = DE$. Затем с чертежа стёрли точку E и подписи точек B, C и D.



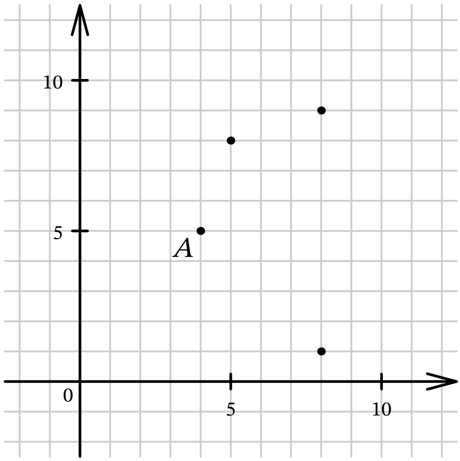
Пусть точка E имела координаты $(x; y)$.

(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение величины xy.

(б) *(3 балла)* Укажите все возможные значения величины xy.

Ответ: $7, 15, 35$.

Вариант 7.6.3. На плоскости отметили точки A, B, C, D, E так, что треугольники ABC и ADE равны: $AB = AD, AC = AE, BC = DE$. Затем с чертежа стёрли точку E и подписи точек B, C и D.



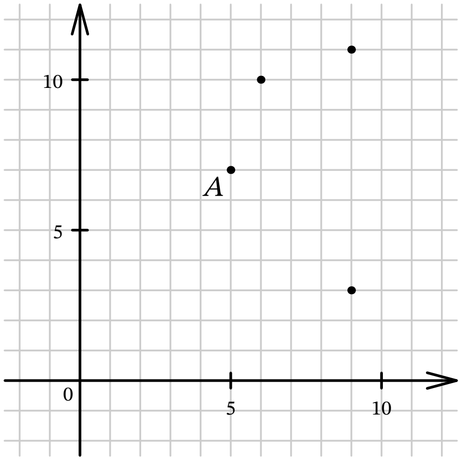
Пусть точка E имела координаты $(x; y)$.

(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение величины xy.

(б) *(3 балла)* Укажите все возможные значения величины xy.

Ответ: $6, 10, 28$.

Вариант 7.6.4. На плоскости отметили точки A, B, C, D, E так, что треугольники ABC и ADE равны: $AB = AD, AC = AE, BC = DE$. Затем с чертежа стёрли точку E и подписи точек B, C и D.



Пусть точка E имела координаты $(x; y)$.
(а) *(1 балл)* Укажите любое возможное значение величины xy.
(б) *(3 балла)* Укажите все возможные значения величины xy.

Ответ: 16, 24, 48.

Вариант 7.7.1. На какое наибольшее количество групп можно разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ так, чтобы сумма чисел в каждой группе была простым числом? (Каждое число должно войти ровно в одну группу. Каждая группа должна состоять из одного или нескольких чисел.)

Ответ: 51.

Вариант 7.7.2. На какое наибольшее количество групп можно разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 70$ так, чтобы сумма чисел в каждой группе была простым числом? (Каждое число должно войти ровно в одну группу. Каждая группа должна состоять из одного или нескольких чисел.)

Ответ: 36.

Вариант 7.8.1. Клетки таблицы 50×50 раскрашены в n цветов так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех n цветов. Найдите наибольшее возможное количество клеток синего цвета, если
(а) *(1 балл)* $n = 2$;
(б) *(3 балла)* $n = 25$.

Ответ: **(а)** 2450. **(б)** 1300.

Вариант 7.8.2. Клетки таблицы 40×40 раскрашены в n цветов так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех n цветов. Найдите наибольшее возможное количество клеток синего цвета, если
(а) *(1 балл)* $n = 2$;
(б) *(3 балла)* $n = 20$.

Ответ: **(а)** 1560. **(б)** 840.

Вариант 7.8.3. Клетки таблицы 30×30 раскрашены в n цветов так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех n цветов. Найдите наибольшее возможное количество клеток синего цвета, если
(а) *(1 балл)* $n = 2$;
(б) *(3 балла)* $n = 15$.

Ответ: **(а)** 870. **(б)** 480.

Вариант 7.8.4. Клетки таблицы 20×20 раскрашены в n цветов так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех n цветов. Найдите наибольшее возможное количество клеток синего цвета, если
(а) *(1 балл)* $n = 2$;
(б) *(3 балла)* $n = 10$.

Ответ: **(а)** 380. **(б)** 220.